FÜGGELÉK - MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ

Ez a fejezet röviden összefoglalja azokat a matematikai ismereteket, amelyeket a Végeselem analízis tantárgy fel fog használni.

Az összefoglalás nem teljes részletességgel mutatja be a szükséges ismereteket, az alapfogalmak és az alapvető összefüggések felsorolásának tekinthető csak. Elsősorban arra kívánja felhívni a figyelmet, hogy melyek azok a témakörök, amelyeket célszerű a korábbi tanulmányokból átismételni.

F.1. Mátrixalgebra

Mátrix: Skaláris mennyiségeknek, számoknak megadott szabály szerint táblázatba rendezett halmaza.

$$\underset{(m\times n)}{\underline{\underline{A}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ezt a táblázatot $m\times n$ típusú (méretű) mátrixnak nevezzük. A mátrixokat a következőkben kétszer aláhúzott betűvel jelöljük.

Mátrixok összege: Azonos típusú (méretű) mátrixok összegén olyan mátrixot értünk, amelynek elemei egyenlők az egyes mátrixok megfelelő (azonos indexű, azonos helyen álló) elemeinek összegével:

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}.$$

$$\underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} + \underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}} = \underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix}}.$$

Mátrixok szorzata: Az $m\times p$ méretű $\underline{\underline{A}}$ mátrix és a $p\times n$ méretű $\underline{\underline{B}}$ mátrix szorzatán azt az $m\times n$ méretű mátrixot értjük, amelynek ij indexű elemét az $\underline{\underline{A}}$ mátrix i-edik sorának és a $\underline{\underline{B}}$ mátrix j-edik oszlopának kombinációja[1] adja.

Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix elemeit $\left[a_{ij}\right]$-vel és a $\underline{\underline{B}}$ mátrix elemeit $\left[b_{ij}\right]$-vel jelöljük, akkor az $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$ mátrix $\left[c_{ij}\right]$ elemei az alábbiak szerint számíthatók ki:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Példa: (2x2)-es mátrixok szorzata: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$.

$$\underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}} = \underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) \end{bmatrix}}.$$

Példa: (2x2)-es mátrix és oszlopmátrix szorzata: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{c}}$.

$$\underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \underset{(2\times 1)}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}} = \underset{(2\times 1)}{\begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{bmatrix}}.$$

A mátrixok szorzása nem kommutatív művelet: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$.

Oszlopmátrix: olyan mátrix, amelynek csak egy oszlopa van: $\underline{\underline{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

Mátrix transzponáltja: olyan művelet, amely a mátrix elemeit tükrözi a főátlóra[2], vagy felcseréli a sorokat és az oszlopokat.

---

[1] Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ és $b_1, b_2, \dots, b_n$ szám n-esek kombinációján az $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ szorzatösszeget értjük.

[2] Főátló: ahol a mátrixban az azonos indexű elemek állnak.

$$\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{A}}^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Sormátrix: olyan mátrix, amelynek csak egy sora van: $\underline{\underline{a}}^T=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$.

A sormátrixot mindig egy oszlopmátrix transzponáltjának tekintjük.

Példa: sormátrix és (2x2)-es mátrix szorzata: $\underline{\underline{a}}^T\,\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{c}}^T$.

$$\underset{(1\times 2)}{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}}\underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}=\underset{(1\times 2)}{\begin{bmatrix} (a_1b_{11}+a_2b_{21}) & (a_1b_{12}+a_2b_{22}) \end{bmatrix}}.$$

Szimmetrikus mátrix: $\underline{\underline{A}}^T=\underline{\underline{A}}$.

Ferdén szimmetrikus mátrix: $\underline{\underline{A}}^T=-\underline{\underline{A}}$.

Egységmátrix: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{E}}=\underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{A}}$.

Mátrix determinánsa:

$$\det\left|a_{ij}\right|=\det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\left\{-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right\}+$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)-a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{13}a_{31}\right)+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right).$$

Mátrix adjungáltja: az adjungált mátrix ij indexű eleme az eredeti mátrix ij eleméhez tartozó előjeles aldetermináns.

Jelölés: $\operatorname{adj}\left(a_{ij}\right)=\underline{\underline{A}}_{ij}$, $(i=1,2,\ \ldots\ n;\quad j=1,2,\ \ldots\ n)$.

Inverz mátrix: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1}=\underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{E}}$.

$$\underline{\underline{A}}^{-1}=\left[a_{ij}^{-1}\right]=\frac{\operatorname{adj}\left(a_{ji}\right)}{\det\left|a_{ij}\right|}.$$

Példa: az $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix inverze: $\underline{\underline{A}}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{b}{ad-bc} \\ -\dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$.

Lineáris algebrai egyenletrendszer: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}=\underline{\underline{b}}$.

Részletesen kiírva: $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

A mátrix szorzást elvégezve:
$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $\underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}}_{=\underline{\underline{E}}}\,\underline{\underline{x}}=\underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{\underline{b}} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x}}=\underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{\underline{b}}$.

Szinguláris mátrix: $\det\left|a_{ij}\right|=0$.

Rosszul kondicionált mátrix: $\kappa\left(\underline{\underline{A}}\right)=\dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\gg 1$, ahol $\lambda_{\max}$ és $\lambda_{\min}$ a mátrix legnagyobb és a legkisebb sajátértékét jelentik. A κ a mátrix kondíció száma.

Rosszul kondicionált mátrixok lineáris egyenletrendszerek megoldása során okoznak problémát, ekkor ugyanis a $\underline{\underline{b}}$ (oszlop)mátrixban bekövetkezett kis változás nagy változást okoz az $\underline{\underline{x}}$ ismeretleneket tartalmazó (oszlop)mátrixban.

F.2. Vektoralgebra

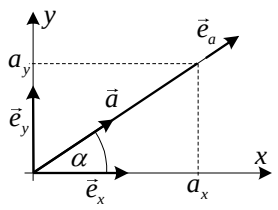
Skaláris mennyiség: olyan fizikai mennyiség, amelyet nagysága, előjele és mértékegysége jellemez.

Vektormennyiség: irányított fizikai mennyiség, amelyet nagysága, iránya és mértékegysége jellemez.

Vektor megadására annak koordinátáit használjuk. Az $\vec{a}$ síkbeli vektor koordinátái: a_x, a_y. Az $\vec{a}$ -t koordinátái és az $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ egységvektorok ($|\vec{e}_x|=1$, $|\vec{e}_y|=1$, $\vec{e}_x\perp\vec{e}_y$) segítségével egyértelműen meghatározhatjuk:

$$\vec{a}=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y=|\vec{a}|\cos\alpha\,\vec{e}_x+|\vec{a}|\sin\alpha\,\vec{e}_y=|\vec{a}|(\cos\alpha\,\vec{e}_x+\sin\alpha\,\vec{e}_y)=|\vec{a}|\,\vec{e}_a.$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2},\qquad |\vec{e}_a|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1.$$

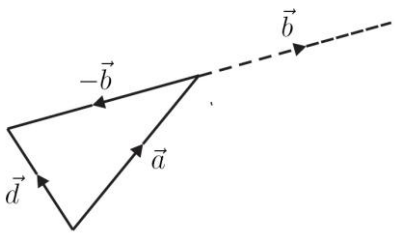


Vektorok összeadása: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$,

$$\left(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y\right)+\left(b_x\vec{e}_x+b_y\vec{e}_y\right)=\underbrace{\left(a_x+b_x\right)}_{c_x}\vec{e}_x+\underbrace{\left(a_y+b_y\right)}_{c_y}\vec{e}_y.$$

Vektorok kivonása: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}\quad\Rightarrow\quad\vec{a}=\vec{b}+\vec{d}$,

$$\left(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y\right)-\left(b_x\vec{e}_x+b_y\vec{e}_y\right)=\underbrace{\left(a_x-b_x\right)}_{d_x}\vec{e}_x+\underbrace{\left(a_y-b_y\right)}_{d_y}\vec{e}_y.$$



Vektormennyiségek között többféle szorzási művelet is definiálható:

Vektorok skaláris szorzása (az eredmény skaláris mennyiség):

Értelmezés: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$.

Kiszámítás: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Az egységvektorok skaláris szorzata: $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x=1$, $\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y=1$, $\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z=1$,

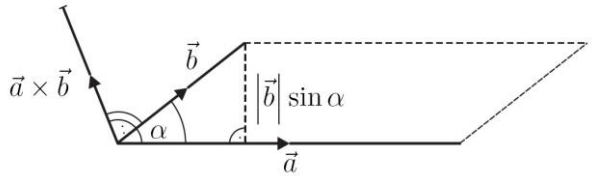
$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y=0$, $\vec{e}_y\cdot\vec{e}_z=0$, $\vec{e}_z\cdot\vec{e}_x=0$.

Következmény: $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, $\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=0\quad\Rightarrow\quad\vec{a}\perp\vec{b}$.

Vektorok vektoriális szorzata (az eredmény vektor):

Értelmezés: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha.$

Kiszámítás: $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x\left(a_y b_z - b_y a_z\right) - \vec{e}_y\left(a_x b_z - b_x a_z\right) + \vec{e}_z\left(a_x b_y - b_x a_y\right).$



Az eredményvektor irányát az ún. jobbkéz szabállyal kapjuk meg: ha jobb kézzel az $\vec{a}$ vektort a $\vec{b}$ vektorba forgatjuk, akkor a jobb kéz hüvelykujja adja meg az eredményvektor irányát.

Az egységvektorok vektoriális szorzata:

$$\vec{e}_x\times\vec{e}_x = \vec{0}, \quad \vec{e}_y\times\vec{e}_y = \vec{0}, \quad \vec{e}_z\times\vec{e}_z = \vec{0},$$
$$\vec{e}_x\times\vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y\times\vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z\times\vec{e}_x = \vec{e}_y,$$
$$\vec{e}_y\times\vec{e}_x = -\vec{e}_z, \quad \vec{e}_z\times\vec{e}_y = -\vec{e}_x, \quad \vec{e}_x\times\vec{e}_z = -\vec{e}_y.$$

Következmény: Ha $|\vec{a}|\neq\vec{0}$ és $|\vec{b}|\neq\vec{0}$, akkor $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{a}\parallel\vec{b}.$

Vektorok vegyes szorzata (az eredmény skalár mennyiség):

Értelmezés: $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$

Kiszámítás: $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}.$

Tulajdonság: $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right) = \left(\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}\right) = \left(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}\right) = -\left(\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}\right) = -\left(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}\right) = -\left(\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}\right).$

Következmény: Ha $|\vec{a}|\neq\vec{0}$, $|\vec{b}|\neq\vec{0}$ és $|\vec{c}|\neq\vec{0}$, és $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right) = 0 \;\Rightarrow$

A három vektor egy síkban van.

Vektorok kétszeres vektoriális szorzata (az eredmény vektor mennyiség):

Értelmezés: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ vagy $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$

Kiszámítás: – az értelmezés alapján,
– kifejtési tétellel.

Kifejtési tétel: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right),$

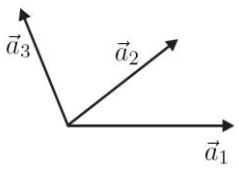
$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right).$$

Tulajdonság: – A vektoriális szorzások sorrendje nem cserélhető fel.
– A vektorok sorrendje nem cserélhető fel.

Reciprok vektorhármas:

Legyen $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ három tetszőleges, nem egy síkba eső vektor:

$$\left(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3\right) = v \neq 0.$$



Az $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ vektorhármashoz tartozó reciprok vektorhármas:

$$\vec{a}_1^* = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\left(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3\right)}, \qquad \vec{a}_2^* = \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\left(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3\right)}, \qquad \vec{a}_3^* = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\left(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3\right)}.$$

Az így definiált vektorok sorra merőlegesek az $\vec{a}_2\vec{a}_3$, az $\vec{a}_3\vec{a}_1$, és az $\vec{a}_1\vec{a}_2$ vektorok által kifeszített síkokra.

Igaz az is, hogy $\left(\vec{a}_1^*\vec{a}_2^*\vec{a}_3^*\right) = \frac{1}{v}$, valamint $\vec{a}_1 = \frac{\vec{a}_2^* \times \vec{a}_3^*}{\left(\vec{a}_1^*\vec{a}_2^*\vec{a}_3^*\right)}$, $\vec{a}_2 = \frac{\vec{a}_3^* \times \vec{a}_1^*}{\left(\vec{a}_1^*\vec{a}_2^*\vec{a}_3^*\right)}$, $\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1^* \times \vec{a}_2^*}{\left(\vec{a}_1^*\vec{a}_2^*\vec{a}_3^*\right)}$.

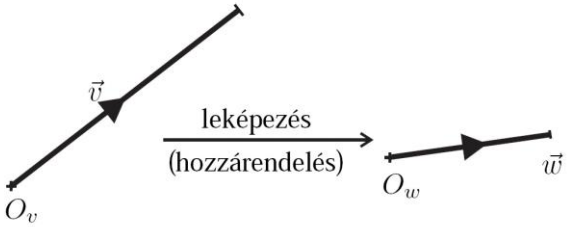
Az előbbi összefüggések szimmetriája, valamint $\frac{1}{v}$ megjelenése miatt a két rendszert egymás reciprok vektorhármasának nevezzük.

F.3. Tenzoralgebra

F.3.1. Tenzor értelmezése és előállítása

Tenzor értelmezése: homogén lineáris vektor-vektor függvény által megvalósított leképezés (hozzárendelés).

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{v}.$$



A tenzor a tetszőleges $\vec{v}$ vektorhoz egy $\vec{w}$ vektort rendel hozzá.

Tulajdonság: - $f\left(\lambda\vec{v}\right) = \lambda f\left(\vec{v}\right)$ ahol λ egy skaláris együttható,

- $f\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) = f\left(\vec{v}_1\right) + f\left(\vec{v}_2\right)$.

Ezzel a két tulajdonsággal ekvivalens:

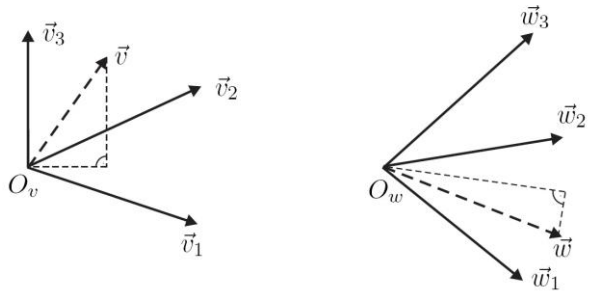
- $\vec{w} = f\left(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\right) = \lambda_1 \underbrace{f\left(\vec{v}_1\right)}_{\vec{w}_1} + \lambda_2 \underbrace{f\left(\vec{v}_2\right)}_{\vec{w}_2} = \lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2$,

  ahol λ_1, λ_2 skaláris együtthatók.

Következmény: $\vec{0} = f(\vec{0})$, (ha $\vec{v} = \vec{0}$, akkor $\vec{w} = \vec{0}$).

Tétel: a tenzort három értékpárja egyértelműen meghatározza, feltéve, hogy $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ vektorok nem esnek közös síkba: $\left(\vec{v}_1\vec{v}_2\vec{v}_3\right) \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_1 \longrightarrow \vec{w}_1 = f(\vec{v}_1) \\ \vec{v}_2 \longrightarrow \vec{w}_2 = f(\vec{v}_2) \\ \vec{v}_3 \longrightarrow \vec{w}_3 = f(\vec{v}_3) \end{array}\right\}, \text{ ahol } \vec{w}_1,\ \vec{w}_2,\ \vec{w}_3 \text{ képvektorok.}$$



A tétel azt jelenti, hogy ha ismerem a $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$-hoz tartozó $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ képvektorokat, akkor tetszőleges $\vec{v}$

vektorhoz meg tudom határozni a $\vec{w}$ képvektort.

Diád – vektorok diadikus szorzata:

Két vektor diadikus szorzatának eredménye egy speciális tenzor, amit *diádnak* nevezünk.

Jelölés: $\underline{\underline{T}} = \vec{a} \circ \vec{b}$.

Értelmezés: olyan szorzás, amelyre fennállnak az alábbi összefüggések:

$$\left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a}\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right),$$

$$\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) = \left(\vec{c} \cdot \vec{a}\right)\vec{b} \neq \left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) \cdot \vec{c}.$$

Diád (speciális tenzor) kiszámítása mátrixszorzással:

$$\underline{\underline{T}} = \left[\underline{\underline{T}}\right]_{x,y,z} = \vec{a} \circ \vec{b} = \underset{(3\times1)}{\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}} \underset{(1\times3)}{\begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}} = \underset{(3\times3)}{\begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}}.$$

Tenzor megadása: – tenzor mátrixa (számkilences) és
– koordináta rendszer.

Tenzor elemeinek formális jelölése: $\left[\underline{\underline{T}}\right]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$

Tétel: minden $\underline{\underline{T}}$ tenzor előállítható három diád összegeként:

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{v}.$$

Legyen ismert három értékpár: $\vec{v}_1 \longrightarrow \vec{w}_1$,
$\vec{v}_2 \longrightarrow \vec{w}_2$,
$\vec{v}_3 \longrightarrow \vec{w}_3$.

A tenzor diadikus előállítása: $\underline{\underline{T}} = \vec{w}_1 \circ \vec{v}_1^* + \vec{w}_2 \circ \vec{v}_2^* + \vec{w}_3 \circ \vec{v}_3^*$.

A tenzor transzponáltjának diadikus előállítása: $\underline{\underline{T}}^T = \vec{v}_1^* \circ \vec{w}_1 + \vec{v}_2^* \circ \vec{w}_2 + \vec{v}_3^* \circ \vec{w}_3$.

Szimmetrikus tenzor: $\underline{\underline{T}}^T = \underline{\underline{T}}$.

Ferdén szimmetrikus (antiszimmetrikus) tenzor: $\underline{\underline{T}}^T = -\underline{\underline{T}}$.

Egységtenzor: $\vec{v} = \underline{\underline{E}} \cdot \vec{v} = \underline{\underline{I}} \cdot \vec{v}$.

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{I}} = \vec{v}_1 \circ \vec{v}_1^* + \vec{v}_2 \circ \vec{v}_2^* + \vec{v}_3 \circ \vec{v}_3^* = \vec{v}_1^* \circ \vec{v}_1 + \vec{v}_2^* \circ \vec{v}_2 + \vec{v}_3^* \circ \vec{v}_3.$$

$$\left[\underline{\underline{E}}\right] = \left[\underline{\underline{I}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tétel: minden tenzor felbontható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus tenzor összegére

$$\underline{\underline{T}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T\right)}_{\underline{\underline{T}}_{\text{sz}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T\right)}_{\underline{\underline{T}}_{\text{fsz.}}}.$$

F.3.2. Tenzor előállítása derékszögű descartesi koordináta-rendszerben

Leképezés: $\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = f\left(\vec{e}_x\right)$,
$\vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = f\left(\vec{e}_y\right)$,
$\vec{e}_z \rightarrow \vec{c} = f\left(\vec{e}_z\right)$.

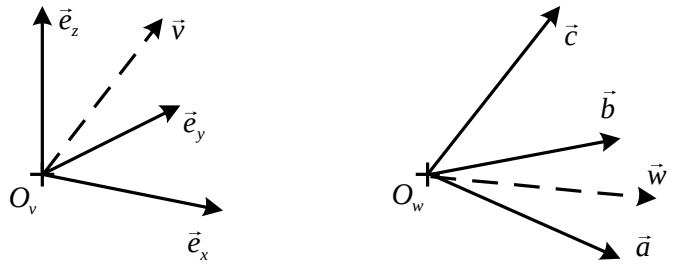
Kapcsolat az előző jelölésekkel: $\vec{v}_1 = \vec{e}_x,\ \vec{v}_2 = \vec{e}_y,\ \vec{v}_3 = \vec{e}_z,$

$$\vec{w}_1 = \vec{a},\ \vec{w}_2 = \vec{b},\ \vec{w}_3 = \vec{c},$$

$$\vec{v}_1^* = \vec{e}_x,\ \vec{v}_2^* = \vec{e}_y,\ \vec{v}_3^* = \vec{e}_z.$$

Tenzor diadikus előállítása Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben (DDKR):

$$\underline{\underline{T}} = \vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y + \vec{c} \circ \vec{e}_z.$$



A tenzor mátrixát részletesen kiírva:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 & 0 \\ a_y & 0 & 0 \\ a_z & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_x & 0 \\ 0 & b_y & 0 \\ 0 & b_z & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_x \\ 0 & 0 & c_y \\ 0 & 0 & c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}.$$

A $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixa derékszögű descartesi koordináta-rendszerben az oszlopaiban tartalmazza az $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$-hez tartozó $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ képvektorok koordinátáit.

F.3.3. Tenzorok kétszeres skaláris szorzata

A kétszeres skaláris szorzás értelmezését az egyszerűség kedvéért két diáddal (speciális tenzor) mutatjuk be. Általános, nem szimmetrikus esetben a kétszeres skaláris szorzás elvégzése több változatban lehetséges:

1. változat: $\left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) \cdot\cdot \left(\vec{c} \circ \vec{d}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right).$

2. változat: $\left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) \cdot\cdot \left(\vec{c} \circ \vec{d}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right).$

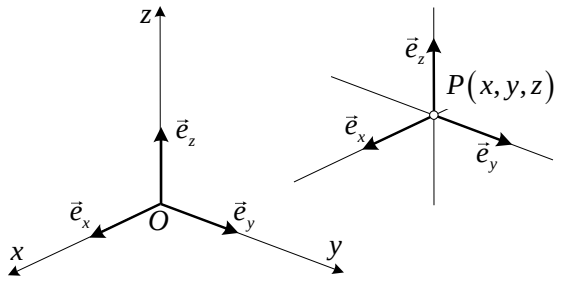
A kétszeres skaláris szorzás eredménye skaláris mennyiség. Az egyes változatok eredménye nem azonos érték. Ha a szorzó tényezők szimmetrikus tenzorok, akkor minden változatnál ugyanazt az eredményt kapjuk.
Pl: a fajlagos alakváltozási energia előállítása:

$$u = \frac{1}{2}\underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z\right) \cdot\cdot \left(\vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{\rho}_x \cdot \vec{\alpha}_x + \vec{\rho}_y \cdot \vec{\alpha}_y + \vec{\rho}_z \cdot \vec{\alpha}_z\right).$$

F.4. Koordináta-rendszerek

Mechanikai mozgásokról mindig valamihez képest, valamire vonatkoztatva beszélhetünk. A mozgás leírásánál a vonatkoztatási alapot a koordináta-rendszer (KR) képezi.

F.4.1. Derékszögű descartesi koordináta-rendszer (DDKR)



Független változó (helykoordináta): x, y, z.

Koordináta vonalak: $y_P, z_P =$ állandó $\rightarrow$ egyenes,

$x_P, z_P =$ állandó $\rightarrow$ egyenes,

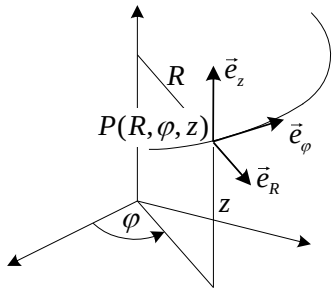
$x_P, y_P =$ állandó $\rightarrow$ egyenes.

Bázisvektorok: a koordináta vonalak érintő egységvektorai.

$\vec{e}_x =$ áll., $\vec{e}_y =$ áll., $\vec{e}_z =$ áll., $\quad |\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1, \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0.$

Descartes[3](dékárt)-féle bázisvektorok nem függenek a helytől és minden pontban merőlegesek egymásra. A DDKR egyenesvonalú, egységbázisú, derékszögű koordináta-rendszer.

F.4.2. Henger koordináta-rendszer (HKR)



Független változó (helykoordináta): R, φ, z.

Koordináta vonalak: $\varphi_P, z_P =$ állandó $\rightarrow$ egyenes,

$R_P, z_P =$ állandó $\rightarrow$ kör,

$R_P, \varphi_P =$ állandó $\rightarrow$ egyenes.

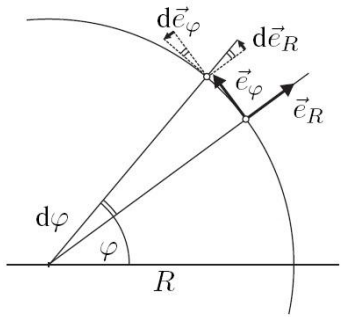
Bázisvektorok: a koordináta vonalak érintő egységvektorai.

$\vec{e}_R = \vec{e}_R(\varphi)$, $\quad \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi)$, $\quad \vec{e}_z =$ áll., $\quad |\vec{e}_R| = |\vec{e}_\varphi| = |\vec{e}_z| = 1, \quad \vec{e}_R \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_R = 0.$

A $\vec{e}_R$ és $\vec{e}_\varphi$ bázisvektorok nem függetlenek a helytől (függenek a φ helykoordinátától) azonban minden pontban merőlegesek egymásra. A HKR görbevonalú, egységbázisú, derékszögű koordináta-rendszer.

A bázisvektorok hely szerinti deriváltja: $\quad \dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_R}{\mathrm{d}\varphi} = \vec{e}_\varphi, \quad \dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = -\vec{e}_R.$

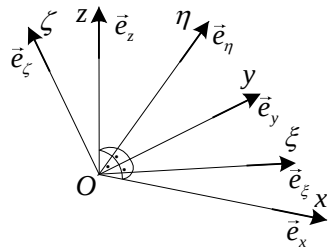
A bázisvektorok hely szerinti változását az ábra szemlélteti.



F.5. Koordináta transzformáció

Legyen (xyz) és $(\xi\eta\zeta)$ két, egymáshoz képest elforgatott, azonos kezdőpontú derékszögű descartesi koordináta-rendszer.

[3]René Descartes (1596 – 1650) francia matematikus és filozófus.



Koordináta transzformáció: ugyanazt a mennyiséget (vektort, tenzort) különböző koordináta-rendszerekben akarjuk felírni.

Vektorok transzformációja:

Jelölés: $\underset{xyz}{[\vec{v}\,]}$ tetszőleges vektor, az xyz koordináta-rendszerben felírva,

$\underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{v}\,]}$ ugyanaz a vektor a $\xi\eta\zeta$ koordináta-rendszerben felírva.

$$\underset{(3\times1)}{\underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{v}]}} = \underset{(3\times3)}{[\underline{\underline{K}}]} \cdot \underset{(3\times1)}{\underset{xyz}{[\vec{v}]}}$$

$$[\underline{\underline{K}}] = \begin{bmatrix} (\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_x) & (\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_y) & (\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_z) \\ (\vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_x) & (\vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_y) & (\vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_z) \\ (\vec{e}_\zeta \cdot \vec{e}_x) & (\vec{e}_\zeta \cdot \vec{e}_y) & (\vec{e}_\zeta \cdot \vec{e}_z) \end{bmatrix}.$$

A $\underline{\underline{K}}$ transzformációs mátrixban az egységvektorok közötti skaláris szorzásokat elvégezve:

$$[\underline{\underline{K}}] = \begin{bmatrix} \cos(\xi,x) & \cos(\xi,y) & \cos(\xi,z) \\ \cos(\eta,x) & \cos(\eta,y) & \cos(\eta,z) \\ \cos(\zeta,x) & \cos(\zeta,y) & \cos(\zeta,z) \end{bmatrix}.$$

A transzformációs mátrix tulajdonsága: $\underset{xyz}{[\vec{v}]} = \underbrace{[\underline{\underline{K}}]^{-1}\underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{v}]} = [\underline{\underline{K}}]^T \underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{v}]}}_{\Downarrow}.$

$[\underline{\underline{K}}]^{-1} = [\underline{\underline{K}}]^T$ ortogonális mátrix

$$[\underline{\underline{K}}]^{-1} \cdot [\underline{\underline{K}}] = [\underline{\underline{K}}] \cdot [\underline{\underline{K}}]^{-1} = [\underline{\underline{K}}]^T \cdot [\underline{\underline{K}}] = [\underline{\underline{K}}] \cdot [\underline{\underline{K}}]^T = [\underline{\underline{E}}].$$

Tenzorok transzformációja: $\underset{xyz}{[\vec{w}]} = \underset{xyz}{[\underline{\underline{T}}]} \cdot \underset{xyz}{[\vec{v}]}, \qquad \underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{w}]} = \underset{\xi\eta\zeta}{[\underline{\underline{T}}]} \cdot \underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{v}]}.$

Az első (bal oldali) egyenlet vektorait transzformálva:

$$[\underline{\underline{K}}] \cdot \Big/ \quad [\underline{\underline{K}}]^T \cdot \underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{w}\,]} = \underset{xyz}{[\underline{\underline{T}}\,]} \cdot [\underline{\underline{K}}\,]^T \underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{v}\,]}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát beszorozva a transzformációs mátrixszal:

$$\underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{w}]} = \underbrace{\underset{xyz}{[\underline{\underline{K}}] \cdot [\underline{\underline{T}}] \cdot [\underline{\underline{K}}]^T}}_{\underset{\xi\eta\zeta}{[\underline{\underline{T}}]}} \cdot \underset{\xi\eta\zeta}{[\vec{v}]},$$

$$\underset{\xi\eta\zeta}{[\underline{\underline{T}}]} = [\underline{\underline{K}}] \cdot \underset{xyz}{[\underline{\underline{T}}]} \cdot [\underline{\underline{K}}]^T.$$

Tétel: Csak olyan számkilences (pl. 3×3-as mátrix) alkothat valamely koordináta-rendszerben tenzort, amely egy másik koordináta-rendszerbe való áttérésnél a fenti szabály szerint transzformálódik.

F.6. Hely szerinti differenciálás

F.6.1. Vektor hely szerinti deriváltja DDKR-ben

Vektor DDKR-ben: $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$.

A vektor helykoordináták szerinti deriváltja:

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial a_y}{\partial x}\vec{e}_y + \frac{\partial a_z}{\partial x}\vec{e}_z,$$

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial y} = \frac{\partial a_x}{\partial y}\vec{e}_x + \frac{\partial a_y}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial a_z}{\partial y}\vec{e}_z,$$

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial z} = \frac{\partial a_x}{\partial z}\vec{e}_x + \frac{\partial a_y}{\partial z}\vec{e}_y + \frac{\partial a_z}{\partial z}\vec{e}_z.$$

Csak a koordinátákat kell deriválni, a bázisvektorok nem függenek a helytől.

F.6.2. Vektor hely szerinti deriváltja HKR-ben

Vektor HKR-ben: $\vec{a} = a_R\vec{e}_R + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z$.

A vektor helykoordináták szerinti deriváltja:

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial R} = \frac{\partial a_R}{\partial R}\vec{e}_R + \frac{\partial a_\varphi}{\partial R}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial a_z}{\partial R}\vec{e}_z,$$

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial \varphi} = \underbrace{\frac{\partial a_R}{\partial \varphi}\vec{e}_R + a_R\frac{\partial\vec{e}_R}{\partial\varphi}}_{\frac{\partial(a_R\vec{e}_R)}{\partial\varphi}} + \underbrace{\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + a_\varphi\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}}_{\frac{\partial(a_\varphi\vec{e}_\varphi)}{\partial\varphi}} + \frac{\partial a_z}{\partial \varphi}\vec{e}_z,$$

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial z} = \frac{\partial a_R}{\partial z}\vec{e}_R + \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial a_z}{\partial z}\vec{e}_z,$$

Az $\vec{e}_R$ és $\vec{e}_\varphi$ bázisvektorok is függenek a φ helykoordinátától.

F.7. A Hamilton-féle differenciál operátor (nabla)

A Hamilton[4]-féle vagy ∇ (nabla[5]) differenciál operátor:

DDKR-ben: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$, HKR-ben: $\nabla = \frac{\partial}{\partial R}\vec{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$.

F.7.1. Divergencia (skaláris szorzás)

a) Vektor divergenciája:

$$\vec{a}\cdot\nabla = \left(a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

$$\vec{a}\cdot\nabla = \left(a_R\vec{e}_R + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial R}\vec{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right) = \frac{\partial a_R}{\partial R} + \frac{1}{R}\left[a_R\frac{\partial\vec{e}_R}{\partial\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi + \frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right] + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Felhasználva, hogy $\frac{\partial\vec{e}_R}{\partial\varphi} = \vec{e}_\varphi$ és $\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi = 1$, végül azt kapjuk, hogy

$$\vec{a}\cdot\nabla = \frac{\partial a_R}{\partial R} + \frac{1}{R}\left[a_R + \frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right] + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Tulajdonság: $\vec{a}\cdot\nabla = \nabla\cdot\vec{a}$.

A vektor jobb oldali divergenciája megegyezik vektor bal oldali divergenciájával.

---

[4]William Rowan Hamilton (1805 – 1865) ír matematikus, fizikus és csillagász.
[5]Hárfához hasonló zsidó hangszer görög nevéből származó elnevezés.

b) Tenzor jobb oldali divergenciája:

$$\underline{\underline{A}}\cdot\nabla=\left(\vec{a}_1\circ\vec{e}_x+\vec{a}_2\circ\vec{e}_y+\vec{a}_3\circ\vec{e}_z\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)=$$

$$=\frac{\partial\vec{a}_1}{\partial x}\circ\underbrace{\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x}_{=1}+\frac{\partial\vec{a}_2}{\partial y}\circ\underbrace{\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y}_{=1}+\frac{\partial\vec{a}_3}{\partial z}\circ\underbrace{\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z}_{=1}=\frac{\partial\vec{a}_1}{\partial x}+\frac{\partial\vec{a}_2}{\partial y}+\frac{\partial\vec{a}_3}{\partial z}.$$

A tenzor jobb oldali divergenciája általában nem egyenlő a tenzor bal oldali divergenciájával: $\underline{\underline{A}}\cdot\nabla\neq\nabla\cdot\underline{\underline{A}}$.

Mennyiségek rendje (indexeinek száma):

	skalár	0	(a)
	vektor	1	(a_i)
másodrendű	tenzor	2	(a_{ij})
harmadrendű	tenzor	3	(a_{ijk})

Tulajdonság: A nablával történő skaláris szorzás a mennyiség rendjét eggyel csökkenti. Például a vektor divergenciája skaláris, a tenzor divergenciája vektor mennyiség.

F.7.2 Rotáció (vektoriális szorzás)

a) Vektor jobboldali rotációja:

$$\vec{a}\times\nabla=\left(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z\right)\times\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)=$$

$$=\frac{\partial a_y}{\partial x}\underbrace{\vec{e}_y\times\vec{e}_x}_{-\vec{e}_z}+\frac{\partial a_z}{\partial x}\underbrace{\vec{e}_z\times\vec{e}_x}_{\vec{e}_y}+\frac{\partial a_x}{\partial y}\underbrace{\vec{e}_x\times\vec{e}_y}_{\vec{e}_z}+\frac{\partial a_z}{\partial y}\underbrace{\vec{e}_z\times\vec{e}_y}_{-\vec{e}_x}+\frac{\partial a_x}{\partial z}\underbrace{\vec{e}_x\times\vec{e}_z}_{-\vec{e}_y}+\frac{\partial a_y}{\partial z}\underbrace{\vec{e}_y\times\vec{e}_z}_{\vec{e}_x}=$$

$$=\left(\frac{\partial a_y}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)\vec{e}_x-\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y+\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial x}\right)\vec{e}_z.$$

A vektor jobb oldali rotációja általában nem egyenlő a vektor bal oldali rotációjával: $\vec{a}\times\nabla\neq\nabla\times\vec{a}$.

b) Tenzor jobb oldali rotációja:

$$\underline{\underline{A}}\times\nabla=\left(\vec{a}_1\circ\vec{e}_x+\vec{a}_2\circ\vec{e}_y+\vec{a}_3\circ\vec{e}_z\right)\times\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)=$$

$$=\frac{\partial\vec{a}_2}{\partial x}\circ\underbrace{\vec{e}_y\times\vec{e}_x}_{-\vec{e}_z}+\frac{\partial\vec{a}_3}{\partial x}\circ\underbrace{\vec{e}_z\times\vec{e}_x}_{\vec{e}_y}+\frac{\partial\vec{a}_1}{\partial y}\circ\underbrace{\vec{e}_x\times\vec{e}_y}_{\vec{e}_z}+\frac{\partial\vec{a}_3}{\partial y}\circ\underbrace{\vec{e}_z\times\vec{e}_y}_{-\vec{e}_x}+\frac{\partial\vec{a}_1}{\partial z}\circ\underbrace{\vec{e}_x\times\vec{e}_z}_{-\vec{e}_y}+\frac{\partial\vec{a}_2}{\partial z}\circ\underbrace{\vec{e}_y\times\vec{e}_z}_{\vec{e}_x}=$$

$$=\left(\frac{\partial\vec{a}_2}{\partial z}-\frac{\partial\vec{a}_3}{\partial y}\right)\circ\vec{e}_x+\left(\frac{\partial\vec{a}_3}{\partial x}-\frac{\partial\vec{a}_1}{\partial z}\right)\circ\vec{e}_y+\left(\frac{\partial\vec{a}_1}{\partial y}-\frac{\partial\vec{a}_2}{\partial x}\right)\circ\vec{e}_z.$$

A tenzor jobb oldali rotációja általában nem egyenlő a tenzor bal oldali rotációjával: $\underline{\underline{A}}\times\nabla\neq\nabla\times\underline{\underline{A}}$.

Tulajdonság: a nablával történő vektoriális szorzás a mennyiség rendjét nem változtatja meg. Például a vektor rotációja vektor, a tenzor rotációja tenzor mennyiség.

F.7.3. Gradiens (diadikus szorzás)

a) Skalár gradiense: $a\nabla=\nabla a=\frac{\partial a}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial a}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial a}{\partial z}\vec{e}_z$.

b) Vektor gradiense: $\vec{a}\circ\nabla=\left(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z\right)\circ\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)=$

$$=\frac{\partial a_x}{\partial x}\vec{e}_x\circ\vec{e}_x+\frac{\partial a_y}{\partial x}\vec{e}_y\circ\vec{e}_x+\frac{\partial a_z}{\partial x}\vec{e}_z\circ\vec{e}_x+\frac{\partial a_x}{\partial y}\vec{e}_x\circ\vec{e}_y+\frac{\partial a_y}{\partial y}\vec{e}_y\circ\vec{e}_y+\frac{\partial a_z}{\partial y}\vec{e}_z\circ\vec{e}_y+$$

$$+\frac{\partial a_x}{\partial z}\vec{e}_x\circ\vec{e}_z+\frac{\partial a_y}{\partial z}\vec{e}_y\circ\vec{e}_z+\frac{\partial a_z}{\partial z}\vec{e}_z\circ\vec{e}_z.$$

A vektor jobb oldali gradiense egyenlő a vektor bal oldali gradiensének transzponáltjával:

$\vec{a}\circ\nabla\neq\nabla\circ\vec{a},\quad \vec{a}\circ\nabla=\left(\nabla\circ\vec{a}\right)^T.$

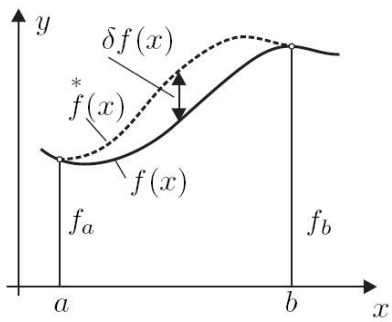
A gradiens tenzor mátrixa: $[\vec{a}\circ\nabla]=\begin{bmatrix}\frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_x}{\partial z}\\ \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial z}\\ \frac{\partial a_z}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial z}\end{bmatrix}.$

Tulajdonság: A nablával történő diadikus szorzás a mennyiség rendjét eggyel megnöveli, például vektor nablával történő diadikus szorzásának eredménye tenzor.

F.8. A variációszámítás alapgondolata

A $\delta f(x)$ az $f(x)$ függvény variációja $\Rightarrow$ $\delta f(x)$ eltérés az $f(x)$ függvénytől. A variáció jelentése: eltérés, megváltozás.

Feltételezzük, hogy az $x=a$ és az $x=b$ helyen nincs eltérés: $\delta f(x)\big|_{x=a}=\delta f(x)\big|_{x=b}=0.$



Funkcionál: olyan leképezés, amelynél

– a $J[f]$ értelmezési tartománya az $f(x)$ függvények halmaza,

– a $J[f]$ értékkészlete a valós számok halmaza.

A funkcionál jele: $J[f]$.

A funkcionál: $J[f]=\int_{x=a}^{b}F\left(x,f,f'\right)\mathrm{d}x$, ahol $F(x,f,f')$ adott (ismert) kifejezés.

A funkcionál variációja:

A $J[f]$ funkcionálban lévő $f(x)$ függvény helyére helyettesítsünk be az $f(x)+\alpha\delta f(x)$ függvényt, ahol α egy valós paraméter. Így az α különböző értékeire különböző, a J funkcionálba helyettesített függvényeket kapunk. Fejtsük *Taylor*-sorba a $J[f(x)+\alpha\delta f(x)]$ funkcionált az $f(x)$ körül úgy, mintha az $f(x)$ egy változó lenne, az $\alpha\delta f\left(x\right)$ pedig az $f(x)$ egy kis megváltozása, ahol $\delta f\left(x\right)$ konstans:

$$J\left[f+\alpha\delta f\right]=J\left[f+\alpha\delta f\right]\Big|_{\alpha=0}+\frac{d}{d\alpha}J\left[f+\alpha\delta f\right]\Big|_{\alpha=0}\alpha+\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\alpha^2}J\left[f+\alpha\delta f\right]\Big|_{\alpha=0}\alpha^2+\ \cdots\ ,$$

A sorfejtésben szereplő deriváltakat szokás n-ed rendű *Gâteaux*-féle[6] (gátó) vagy iránymenti deriváltnak is nevezni.

[6]René Gâteaux (1889-1914) francia matematikus

Jele: $D^n J\left[f,\delta f\right]=\dfrac{d^n}{d\alpha^n}J\left[f+\alpha\,\delta f\right]\Big|_{\alpha=0}$.

A $J[f]$ funkcionál első rendű *Gâteaux*-féle deriváltját a funkcionál δf szerinti első variációjának is nevezzük.

$$DJ[f,\delta f]=\frac{d}{d\alpha}J[f+\alpha\,\delta f]\Big|_{\alpha=0}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{J[f+\alpha\,\delta f]-J[f]}{\alpha}.$$

A második variáció Gâteaux szerinti értelmezése:

$$D^2J[f,\delta f]=\frac{d^2}{d\alpha^2}J[f+\alpha\,\delta f]\Big|_{\alpha=0}.$$

Cél: funkcionálok szélső értékének megkeresése.

Peremfeltétel: $\left.\begin{array}{l} f(x=a)=f_a \\ f(x=b)=f_b \end{array}\right\}$ adott.

Feladat: az $f(x)$ függvényhalmazból annak az $f_0(x)$ függvénynek a kikeresése, amelyre a $J\left[f\right]$ funkcionál szélsőértéket szolgáltat.

A variációszámítás szerint funkcionálok szélsőértékének feltétele:

$$\delta J=0 \text{ és } \begin{cases} \text{minimum esetén } \delta^2 J>0, \\ \text{maximum esetén } \delta^2 J<0. \end{cases}$$

A variációt (variálási műveletet) formálisan a deriváláshoz hasonlóan kell képezni, de

– a variáció nem a hely, hanem különböző paraméterek szerinti differenciál,

– a variáció (változtatás) során a peremfeltételt mindig ki kell elégíteni.

Például az elmozdulásmező

– differenciálja: $\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$,

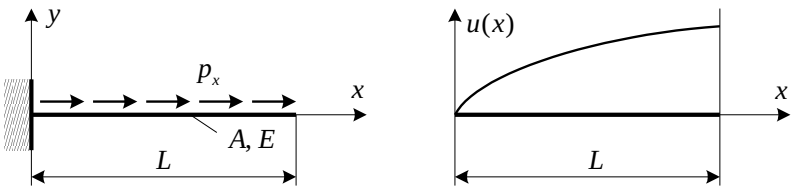
– variációja: $\delta u=\dfrac{\partial u}{\partial c_1}\delta c_1+\dfrac{\partial u}{\partial c_2}\delta c_2+\ldots+$.

Az $f(x)$ függvény

– differenciálja: $\mathrm{d}f=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$,

– variációja: $\delta f=\dfrac{\partial f}{\partial c_1}\delta c_1+\dfrac{\partial f}{\partial c_2}\delta c_2+\ldots+$.

Példa funkcionál első és második variációjának előállítására:



<u>Adott:</u> az ábrán látható, $p_x=$ állandó megoszló erőrendszerrel húzott, befalazott tartó L hossza, A keresztmetszete és E rugalmassági modulusa.

<u>Feladat:</u> a tartó Π teljes potenciális energiájának, (mint a $\Pi[u]$ funkcionálnak) az első és második variációjának előállítása.

A teljes pontenciális energia értelmezése a 4.3. pontban megtalálható.
Az $u(x)$ függvény a rúd pontjainak axiális irányú elmozdulása.

A húzott rúd teljes potenciális energiája: $\Pi[u] = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{L} AE(u')^2\,dx - \int_{x=0}^{L} p_x u\,dx.$

A teljes potenciális energia első variációja:

$$\delta\Pi[u,\delta u] = \frac{d}{d\alpha}\Pi[u,\alpha\,\delta u]\Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{1}{2}\int_{x=0}^{L} AE(u'+\alpha\,\delta u')^2\,dx - \int_{x=0}^{L} p_x(u+\alpha\,\delta u)dx\right\}\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \left\{\int_{x=0}^{L} AE(u'+\alpha\,\delta u')\,\delta u'\,dx - \int_{x=0}^{L} p_x\,\delta u dx\right\}\Bigg|_{\alpha=0} = \int_{x=0}^{L} AEu'\delta u' dx - \int_{x=0}^{L} p_x\,\delta u dx\,.$$

A teljes potenciális energia második variációja:

$$\delta^2\Pi[u,\delta u] = \frac{d^2}{d\alpha^2}\Pi[u,\alpha\,\delta u]\Big|_{\alpha=0} = \frac{d^2}{d\alpha^2}\left\{\frac{1}{2}\int_{x=0}^{L} AE(u'+\alpha\,\delta u')^2\,dx - \int_{x=0}^{L} p_x(u+\alpha\,\delta u)dx\right\}\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \left\{\int_{x=0}^{L} AE\,(\delta u')^2\,dx\right\}\Bigg|_{\alpha=0} = \int_{x=0}^{L} AE\,(\delta u')^2\,dx\,.$$

SZAKIRODALOM

[1] Páczelt I.: *Végeselem-módszer a mérnöki gyakorlatban*, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1999.

[2] Bojtár I., Gáspár Zs.: *Végeselem-módszer építőmérnököknek*, Terc Kft., Budapest, 2003.

[3] Bathe K. – J.: *Finite element procedures*, Prentice Hall, Inc. 1996.

[4] Szabó B., Babuška I.: *Finite element analysis*, John Wiley & Sons, Inc. 1991.

[5] Altenbach J., Fischer U.: *Finite-element Praxis*, Fachbuchverlag Leipzig, 1991.

[6] Matthews F. L., Davies G. A. O., Hitchings D., Soutis C.: *Finite Element modelling of composite materials and structures*, Woodhead Ltd., 2000.

[7] Budynas R. G.: *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, Mc. Graw-Hill, 1999.

[8] M. Csizmadia B., Nándori E.: *Mechanika Mérnököknek – Szilárdságtan*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1999.

[9] Kleiber M.: *Handbook of Computational Solid Mechanics*, Springer Verlag, 1998.

[10] Argiris J., Mleinek H. P.: *Computerdynamik der Tragwerke, Die Methode der Finiten Elemente, Band III.*, Vieweg Verlag, 1997.

[11] Krätzig W. B., Basar Y.: *Tragwerke 3, Theorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente*, Springer Verlag, 1997.

[12] Béda Gy., Kozák I., Verhás J.: *Kontinuummechnika*, Műszaki Könyvkiadó, 1986.

[13] Béda Gy., Kozák I.: *Rugalmas testek mechanikája*, Műszaki Könyvkiadó 1987.

[14] Richter W.: *Numerische Lösung partieller Differentialgleichungen mit der Finite-Elemente-Methode*, Vieweg Verlag, 1986.

[15] Simmonds J. G.: *Tenzoranalízis dióhéjban*, Műszaki Könyvkiadó, 1985.

[16] Papastavridis J. G.: *Tensor calculus and analytical dynamics*, CRC Press, 1999.

[17] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.: *Lemezek és héjak elmélete*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1999.

[18] Reddy J. N. : *Mechanics of laminated composite plates and shells* – Theory and Analysis, CRC Press, 2004.

[19] Barbero E.J.: *Finite Element Analysis of Composite Materials*, CRC Press, 2008.

[20] Berlioz A., Trompette Ph.: *Solid Mechanics using the Finite Element Method*, John Wiley & Sons Inc., 2010.

[21] Smith I. M., Griffiths D. V.*: Programming the Finite Element Method*, John Wiley & Sons Inc., 2004.

[22] Zienkiewicz O. C., Taylor R.L.: The *Finite Element Method, Vol. 1.: The Basis*, Butterworth – Heinemann, 2000.

[23] Zienkiewicz O. C., Taylor R.L.: *The Finite Element Method, Vol. 2.: Solid Mechanics*, Butterworth – Heinemann, 2000.

[24] Belytschko T. – Liu W. K. – Moran B.: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons Ltd., 2001.

[25] Lewis R. W. - Morgan K. – Thomas H. R. – Setharamu K. N.: *The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis*, John Wiley & Sons Ltd., 1996.

[26] Reddy J. N. – Gartling D. K.: *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, CRC Press, 2001.